Université Hassan II- Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia
Département de Mathématiques

Année 2015/2016
Parcours: **MIP**
Module: **M135**

Partiel 1 d'analyse 3 (M 135)

Session Automne 2015- S3 (2 H)

Exercice 0.1

Soit $f(x,y) = x.\arctan\left(\frac{y}{x}\right)^2$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0,y) = 0$ *pour tout* y *de* $\mathbb{R}$.

1. *Établir que la fonction* f *est continue en tout point de* $\mathbb{R}^2$.
   (on rappelle que $-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(t) \leq \frac{\pi}{2}$*).*
2. *Calculer les dérivées partielles premières par rapport à* x *et par rapport à* y *en tout point* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $x \neq 0$.
3. *Montrer que* f *admet des dérivées partielles premières par rapport à* x *et par rapport à* y *en tout point* $(0,b)$, *pour* $b \in \mathbb{R}$ *(distinguer les cas* $b = 0$ *et* $b \neq 0$*).*
4. *Étudier la continuité des fonctions dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
5. *La fonction* f *est-elle différentiable en* $(0,0)$*?*

Exercice 0.2

1. *Soit* f *la fonction de trois variables définie sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ *par* $f(x,y) = \frac{xe^{-x}}{y} + \frac{y}{e} - \frac{5}{2e}$.
   Déterminer les points stationnaires (critiques) de f *et leurs natures (maximum, minimum ou point selle).*
2. *Soient* f *et* g *deux fonctions de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ *telles que:*

$$f(x,y) = g\left(\frac{x}{y}, xy\right)$$

   Exprimer les dérivées partielles premièresde f *par rapport à* x *et par rapport à* y *en fonction de celles de* g.

Exercice 0.3

1. *Représenter le domaine et calculer l'intégrale double* $I = \iint_D \sqrt[3]{1-u-v}\,dudv$, *où*

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 1\}.$$

2. *En déduire la valeur de l'intégrale double* $J = \iint_\Delta x^2y^2\sqrt[3]{1-x^3-y^3}\,dxdy$, *où*

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^3+y^3 \leq 1\}.$$

3. *Représenter le domaine et calculer l'intégrale triple* $K = \iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, *où* Ω *est le domaine limité par les surfaces d'éqations:* $x^2+y^2 = z^2$ *et* $x^2+y^2 = 4-z^2$. *(on admet que* $\int r^2\sqrt{4-r^2} = \frac{1}{4}r(r^2-2)\sqrt{4-r^2} + 2\arcsin(\frac{r}{2}))$.

Barème
Exo 1(8 points): **Q1**. 0.5+1- **Q2**. 1+1- **Q3**. 0.5+0.5+0.5- **Q4**. 1+1- **Q5**. 1.
Exo 2(6 points): **Q1**. 1.5+1.5- **Q2**.1.5+1.5.
Exo 3(6 points): **Q1**. 0.5+1.5- **Q2**. 2- **Q3**. 0.5+1.5.

Exercice 0.4

Soit f une fonction numérique de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0. \qquad (1)$$

On pose $u = xy$ et $v = x/y$ et $f(x,y) = g(u,v)$.

1. Donner une équation aux dérivées partielles (E') vérifiée par g.
2. Résoudre (E') puis déterminer la fonction f solution de 1.